Segundo Parcial Matemáticas 2 Miguel Guzmán (7-8)

Primer Pregunta.

$$1.- \int \frac{e^{\arctan(x)} + x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx$$

Separando la integral pos propiedades

$$I = \underbrace{\int \frac{e^{\arctan(x)}}{1+x^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx}_{I_2}$$

Para I_1 se realiza el cambio de variable $u = \arctan(x) \quad => \quad du = \frac{1}{1+x^2}dx$, por lo que

$$I_1 = \int e^u du \quad => \quad I_1 = e^u + C_1 \quad => \quad I_1 = e^{\arctan(x)} + C_1$$

Para I_2 se realiza el cambio de variable $u = \ln(1+x^2) \quad => \quad du = \frac{2x}{1+x^2}dx$, por lo que

$$I_2 = \frac{1}{2}\int u du \quad => \quad I_2 = \frac{1}{4}u^2 + C_2 \quad => \quad I_2 = \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + C_2$$

Para finalizar sabemos que $I = I_1 + I_2$

$$I = e^{\arctan(x)} + \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2) + C$$

$$2.- \int \frac{3^{2x} - 2^{2x}}{6^x}dx$$

Separando el integrando y separando la integral por propiedad.

$$I = \underbrace{\int \frac{3^{2x}}{6^x}dx}_{I_1} - \underbrace{\int \frac{2^{2x}}{6^x}dx}_{I_2}$$

Resolvemos las integrales.

$$I_1 = \int \frac{3^{2x}}{6^x}dx \quad => \quad I_1 = \int \frac{3^x 3^x}{(2\ 3)^x}dx \quad => \quad I_1 = \int \frac{3^x}{2^x}dx \quad => \quad I_1 = \int \left(\frac{3}{2}\right)^x dx \quad => \quad I_1 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C_1$$

Para la segunda se procede igual

$$I_2 = \int \frac{2^x 2^x}{2^x 3^x}dx \quad => \quad I_2 = \int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx \quad => \quad I_2 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + C_2$$

Sabemos que $I = I_1 - I_2$

Por lo que

$$I = \frac{1}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{3}{2}\right)^x - \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\left(\frac{2}{3}\right)^x + C$$

$$3.-\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$$

Sea el cambio de variable. $u^3 = x \quad => \quad 3u^2du = dx$

$$I = \int 3u^2e^udu \quad => \quad I = 3\int u^2e^udu$$

Integrando esta nueva integral por el teorema de integración por partes,

$$a = u^2 \qquad dv = e^udu \qquad => \quad da = 2udu \quad v = e^u$$

$$I = 3\left(u^2e^u - \int 2ue^udu\right)$$

De nuevo por partes

$$a = u \quad dv = e^udu \quad => \quad da = du \quad v = e^u$$

$$I = 3\left(u^2e^u - 2(ue^u - e^u)\right) + C \quad => \qquad I = e^u(3u^2 - 6u + 6) + C$$

Regresando cambio

$$I = e^{\sqrt[3]{x}}\left(3x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 6\right) + C$$

Segunda Pregunta.

1.- Para demostrar, se tiene

$$y = \operatorname{sech}(x) => \quad y = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad => \quad y = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} \quad => \quad ye^{2x} + y = 2e^x$$

Con un cambio de variable, $a = e^x$

$$a^2y - 2a + y = 0$$

Aplicando la resolvente

$$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \quad => \qquad a = \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y}$$

Regresando cambio

$$e^x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad => \quad x = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}\right)$$

Por dominio de logaritmo, solo es valida la raíz positiva

Por lo que se demuestra que

$$\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

2.- Sustituyendo el valor en e l resultado obtenido

$$\operatorname{arcsech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{3}{4}}\right) \;\; => \;\operatorname{arcsech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{4}}\right)$$

Por lo que

$$\operatorname{arcsech}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad => \quad \mathbf{arcsech}\left(\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\mathbf{ln}(\mathbf{3}) \;\; \boldsymbol{RESP}$$

Tercera Pregunta

Primero buscamos dominio

$$(1)\;\; 3x+1>0 \;\; => \;\; x > -\frac{1}{3} \qquad (2)\;\; 6x-1>0 \;\; => \;\; x > \frac{1}{6} \qquad (3)\; 9x-1>0 \;\; => \;\; x > \frac{1}{9}$$

Por lo que $Dom(x) \in \left(\frac{1}{6}, \infty\right)$

, Aplicamos propiedades

$$\ln\big((3x+1)(6x-1)\big) = \ln(9x-1)$$

Aplicando lo exponencial de base e

$$(3x+1)(6x-1) = 9x-1 \quad => \quad 18x^2+3x-1 = 9x-1$$

Resolvemos

$$18x^2 - 6x = 0 \quad => \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{1}{3}$$

Luego comparando con dominio, se concluye que

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \;\; \boldsymbol{RESP}$$

Cuarta Pregunta.

Dada la función

$$y = x^{x^a} + x^{a^x}$$

Derivando se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} x^{x^a} + \frac{d}{dx} x^{a^x}$$

Buscamos las derivadas.

$$\frac{d}{dx} x^{x^a} \;:\quad y_1 = x^{x^a} \quad aplicando\, \ln(\;) \quad \ln(y_1) = x^a \ln(x)$$

Derivamos

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dx} = a\, x^{a-1} \ln(x) + x^a \frac{1}{x} \quad => \quad \frac{dy_1}{dx} = x^{x^a}\left(x^{a-1}(a \ln(x) + 1)\right)$$

Realizando el mismo procedimiento para el otro término se tiene

$$\frac{d}{dx} x^{a^x} \;:\quad y_2 = x^{a^x} \quad aplicando\, \ln(\;) \quad \ln(y_2) = a^x \ln(x)$$

Derivamos

$$\frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dx} = a^x \ln(a) \ln(x) + a^x \frac{1}{x} \quad => \quad \frac{dy_2}{dx} = x^{a^x}\left(a^x\left(\ln(a)\ln(x) + \frac{1}{x}\right)\right)$$

Se concluye

$$\frac{dy}{dx} = x^{x^a}\left(x^{a-1}(a \ln(x) + 1)\right) + x^{a^x}\left(a^x\left(\ln(a)\ln(x) + \frac{1}{x}\right)\right)$$